Tentamen i MSG110 Sannolikhetsteori, 7.5 högskolepoäng, Göteborgs universitet.
Tid: Torsdagen den 17 Augusti 2017, kl. 14.00-18.00.
Examinator och Jour: Olle Nerman, room L3056, MV, Chalmers.
Telefon: 031 7723565.
Hjälpmedel: Miniräknare, egen formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medföljande tabeller.
Betygsgränser: För betyget G fordras 12 poäng, för betyget VG 20 poäng.

---

1. Vikten på skorpor i en viss produktionsprocess antas variera lite grann på ett slumpmässigt sätt och oberoende för de individuella skorporna. Väntevärdet av en enskild skårpas vikt antas vara **26** gram och standardavvikelsen **2.5** gram. Vad är (approximativt) sannolikheten för att **20** slumpvalda skorpor som skall packas i samma påse totalt väger minst **500** gram (=vikten som påsen är märkt med). Motivera! (3p)
2. Låt **X** vara Normafördelad med väntevärde -**3** och varians **16**. Vad är
   a. medianen i fördelningen för **X**? (1p)
   b. maximum av sannolikhetstätheten (pdf) för **X**? (1p)
   c. sannolikheten **P(|X|>8)** ? (1p)
   d. den undre kvartilen i fördelningen för **X**? (1p)
3. En tvådimensionell stokastisk variabel **(X,Y)** har sannolikhetstätheten **c g(x,y)** där **c** är en konstant och **g(x,y)= exp-(3x+5y)** för **x>0** och **y>0** (och **g(x,y)=0** för övrigt).
   a. Bestäm konstanten **c**. (1p)
   b. Bestäm kovariansen och korrelationen mellan **Y** och **X.** (2p)
4. Du har två urnor framför dig. **Urna A** innehåller **2** vita och **4** svarta kulor. **Urna B** innehåller **5** vita och **2** svarta kulor. Du väljer på måfå en kula i **Urna A** och samtidigt oberoende och på måfå en kula i **Urna B**. Därefter byter du plats på de båda valda kulorna. Slutligen drar du sedan en kula på måfå ur **urna B**. Vad är
   a. sannolikheten att den dragna kulan är svart? (1p)
   b. den betingade sannolikheten att den dragna kulan ursprungligen kom från **Urna A** givet att den är svart? (2p)
5. Som en modell för resultatet i en viss fotbollsmatch använder du att det ena laget gör ett Poissonfördelat antal mål **X** med väntevärdet **1** och det andra laget ett Poissonfördelat antal mål **Y** med väntevärdet **2**. Du antar också att **X** och **Y** är oberoende av varandra.
   a. Uttryck händelsen att det blir oavgjort i matchen med hjälp av **X** och **Y**. (1p)

   Beräkna också sannolikheterna för att
   b. matchen slutar **0-0**? (1p)
   c. matchen slutar **3-1** till det första laget? (1p)
   d. det blir totalt högst **4** mål i matchen? (1p)

VÄND!

6. I ett normalfördelningsstickprov med **8** oberoende observationer har någon beräknat stickprovsmedelvärdet och stickprovsstandardavvikelsen till **3.35** respektive **0.25**.

a. Du ombeds att förvandla informationen till ett uppåt begränsat observerat konfidensintervall för det bakomliggande väntevärdet **μ** för de enskilda observationerna med konfidensgraden **99%**. Vad blir resultatet? (2p)

b. Du ombeds istället att hypotespröva nollhypotesen $\mathbf{H_0}$: väntevärdet=**3.5** med signifikansnivån **5%** mot den alternativa hypotesen $\mathbf{H_1}$: väntevärdet är < **3.5** . Vad blir då din slutsats? Motivera! (2p).

7. I en linjär regression med svarsvariabler **y** och inställningsvariabler **x** blev medelvärdet av **y**-variablerna **13,7** och medelvärdet av **x**-variablerna var **0.82**. Skattningen av riktningskoeffecieten **β** för den skattade regressionslinjen blev **0.93**.

a. Beräkna en observerad punktskattning av interceptet **α.** (1p)

b. Beräkna en punktskattning av väntevärdet vid **x**-inställningen **-6** . (1p)

8. Antag att du i samband med statistisk slutledning rörande en viss fysikalisk parameter **θ** gör två oberoende försök där du dels, baserat enbart på försöksresultatet i det första försöket, har en väntevärdesriktig punktskattning **Y** av **θ** med det teoretiska standardfelet **1.5** och dels, baserat enbart på det andra försöket, har ännu en väntevärdesriktig punktskattning **Z** av samma parameter **θ** med teoretiska standardfelet **2/3**.

a. För vilka reella konstantkombinationer av **a** och **b** blir **T=aY+bZ** en väntevärdesriktig punktskattning av **θ**? (1p)

b. Vilket av alla de möjliga **a**-**b**-paren du angivit i a-delen resulterar i det minsta standardfelet hos punktskattningen **T**? (2p)

9. Antag att $\mathbf{U_1, U_2, \ldots\ U_{10}}$ är ett stickprov av oberoende stokastiska variabler som är likformigt fördelade på intervallet **[0,c]**, där **c>0** är en okänd parameter.

a. Härled maximum Likelihoodskattningen av **c** baserad på $\mathbf{U_1, U_2, \ldots\ U_{10}}$. (2p)

b. Visa att skattningen i a-delen av uppgiften inte är väntevärdesriktig. (2p)